No.

Date

五. 复变函数的微积分

1. 复平面

R^2关于 +、-、×、/ 运算构成一个域(C) 加法零元 $z=0$，
乘法单位元 $z=1$. 满足交换、结合、分配等运算律。C可称为复平面.

{ C关于复数的加、数乘及 R构成了一个二维线性空间，一组基为$\{1, i\}$
C关于复数的加、数乘及 C 构成了一个一维线性空间，基$\{1\}$.

若记$(0,1)=i$, $(1,0)=1$ 则 $\forall z=(x,y)\in C$, $z=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)=x+iy$
$x=\mathrm{Re}\, z$ $y=\mathrm{Im}\, z$. $i^2=-1$

2. 复变函数

复平面到复平面的对应关系。 $f:\Omega\subset C\to C$ $(x,y)\in\Omega\mapsto(u,v)$.
若记 $z=x+iy$, $\omega=u+iv$，复变函数也可记为 $\omega=f(z)$
有两个分量函数 $\begin{cases} u=u(x,y) & ：实部函数 \\ v=v(x,y) & ：虚部函数. \end{cases}$
复变函数允许多值：eg $\omega=\sqrt[n]{z}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$
$k=0,1,\dots,n-1$

3. 极限与连续性

$\omega=f(z)$中，只要实部函数和虚部函数在一点的极限存在/函数连续
$\omega=f(z)$的极限就存在/函数连续.

4. 复变函数的微分

$\omega=f(z)$ 在 $B(z_0,r)=\{z\mid |z-z_0|<r\}$ 有定义，$\Delta\omega=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$
$=a\Delta z+o(|\Delta z|)$
其中$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, $a=\alpha+i\beta$，则称f在z_0可微. $d\omega=a\Delta z$为f在z_0的微分.

No.

Date

$$\frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$o(|\Delta z|) = o_1(|\Delta z|) + i o_2(|\Delta z|).$$

$$\begin{aligned}
\therefore \Delta\omega &= f(z_0+\Delta z) - f(z_0) \\
&= [u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)] \\
&= a\Delta z + o(|\Delta z|) \\
&= (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + o_1(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) + i o_2(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \\
&= [(\alpha\Delta x - \beta\Delta y) + o_1(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})] + i[(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + o_2(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})]
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0) = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + o_1(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0) = \alpha\Delta y + \beta\Delta x + o_2(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

$$\beta = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}.$$

$$\therefore \quad dw = a\,dz = (\alpha + i\beta)\,dz = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\overset{\text{or}}{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} + i\frac{\partial v}{\partial x}\overset{\text{or}}{\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}\right] dz.$$

$\therefore$ 复变函数 $\omega = f(z)$ 在 z_0 可微

$\Longleftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 在 (x_0, y_0) 可微. & (x_0, y_0) 处满足 Cauchy-Riemann 条件 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$

5. 复积分.

$$\int_{L(A)}^{(B)} f(z)\,dz = \int_{L(A)}^{(B)} [u(x,y) + i v(x,y)](dx + i dy)$$

$$= \underbrace{\int_{L(A)}^{(B)} u(x,y)dx - v(x,y)dy}_{\text{实部积分}} + i \underbrace{\int_{L(A)}^{(B)} v(x,y)dx + u(x,y)dy}_{\text{虚部积分}}.$$

实部积分 虚部积分.

若 L 的方程为 $z = z(t) = x(t) + i y(t)$ ~~$t\in(\alpha,\beta)$~~. 则

$$\int_{L(A)}^{(B)} f(z)\,dz = \int_{L(A)}^{(B)} u\,dx - v\,dy + i\int_{L(A)}^{(B)} v\,dx + u\,dy$$

$$= \int_\alpha^\beta [(ux' - vy') + i(vx' + uy')]\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

No.

Date

6. 解析函数 初等实函数的解析开拓

$\omega=f(z)$ 在 $\Omega\subset C$ 内有定义，z_0 是 Ω 一个内点，若 $\exists r>0$，使 $f(z)$ 在 $B(z_0,r)$ 内点点可微，则 $f(z)$ 在 z_0 点解析

在 Ω 内点点解析的函数：解析函数 $\Leftrightarrow$ 各偏导 $(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y})$ 连续；u,v 在 Ω 内满足 Cauchy-Riemann 条件

在 Ω 内不解析点：f 的奇点.

$f(x)$ 是定义在 $I\subset R^1$ 上的实函数，$F(z)$ 是定义在 $\Omega\subset C$ 上的复变函数，如果 $I\subset\Omega$，$x\in I$，$f(x)=F(x)$，且 $F(z)$ 在 Ω 上解析，则 $F(z)$ 是 $f(x)$ 的一个解析开拓.

① 多项式：$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 在 C 上的解析开拓为

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

② 三角函数与双曲函数：$P(x)=\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$，$Q(x)=\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

在 C 上的解析开拓为 $P(z)=\cos z$，$Q(z)=\sin z$.

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}=\frac{\frac{\cos x+i\sin x}{e^y}-\frac{e^y}{\cos x+i\sin x}}{2i}$$

$$=\frac{-i\cos x+\sin x}{2e^y}-\frac{e^y}{2i\cos x-2\sin x}$$

$$=\frac{1}{2e^y}(\sin x-i\cos x)+\frac{e^y}{2}(\sin x+i\cos x)=\left(\frac{1}{2e^y}+\frac{e^y}{2}\right)\sin x+i\left(\frac{e^y}{2}-\frac{1}{2e^y}\right)\cos x$$

$$\therefore\frac{d\sin z}{dz}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left(\frac{1}{2e^y}+\frac{e^y}{2}\right)\cos x-i\left(\frac{e^y}{2}-\frac{1}{2e^y}\right)\sin x.$$

$$=\frac{1}{2e^y}(\cos x+i\sin x)+\frac{e^y}{2}(\cos x-i\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{ix-y}+e^{y-ix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$$

$$=\cos z.$$

类似地，$\frac{d\cos z}{dz}=\sin z$.

No.

Date

$sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ 也是C上的解析函数.

③ 根式函数

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} , k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

如果适当地限制辐角的范围 则可以使多值函数"单值化".

④ 对数函数

$\omega = Ln z$ 令 $z = re^{i\theta}$. $\omega = u + iv$. 则

$e^{u+iv} = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$

$\therefore u = \ln r$, $v = \theta + 2k\pi$.

$\therefore Ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = \ln|z| + i Arg z$.

其单值分支为 $Ln z = \ln|z| + i Arg z + i2k\pi$ 其中k为确定的正整数 [illegible]

称为对数函数的主值分支.

在切割了的复平面上, 对数函数处处解析.

$$\frac{d(Ln z)}{dz} = \frac{d(\ln\sqrt{x^2+y^2} + i\,arctg\frac{y}{x})}{dz} = \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} - i\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \frac{1}{z}$$

7. 解析函数的积分

复变函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在复路径L从A到B的积分 可表示为 两个第二类曲线积分之和 $(x,y) \to (u,v)$

$$\int_{L(A)}^{(B)} f(z)dz = \int_{L(A)}^{(B)} udx - vdy + i\int_{L(A)}^{(B)} vdx + udy .$$

△ Cauchy 积分定理: 设L是复平面上的一条简单闭路径,逐段光滑, D为L的内部. f(z)在D内解析 在$\bar{D}$上连续, 则 $\oint_L f(z)dz = 0$

该定理与Green公式类似, 地位与 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 类似的是Cauchy-Riemann条件

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ 不同的是Green公式中的一个二元函数变成了Cauchy积分定理中f(z)所含的实部、虚部两个二元函数.

自动满足

No.

Date

△ Cauchy积分公式：设区域D的边界是∂D，$f(z)$在D内点点解析，在$\overline{D}=D+\partial D$上连续，则 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$.

证明：$\forall z\in D$，记$F(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-z}$，则$F(\xi)$在D内除z点外均解析

以z点为中心，充分小的$\rho>0$为半径，作圆周L_ρ，由Cauchy积分定理在复连域上的形式，得 $\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\oint_{L_\rho^-}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=0$

$\therefore \int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\oint_{L_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$.

欲证原式，只须证 $\lim_{\rho\to 0}\oint_{L_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=2\pi i f(z)$

令 $\xi-z=\rho e^{i\theta}$，$\theta: 0\sim 2\pi$

则 $\oint_{L_\rho}\frac{d\xi}{(\xi-z)}=\int_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}}d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i$

$\therefore \left|\oint_{L_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-2\pi i f(z)\right|=\left|\oint_{L_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\oint_{L_\rho}\frac{f(z)}{\xi-z}d\xi\right|$

$=\left|\oint_{L_\rho}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi\right|$

$\because \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，只要 $0<\rho<\delta$，$|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$

$\therefore \left|\oint_{L_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-2\pi i f(z)\right|<\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=2\pi\varepsilon$.

可见，区域D内解析的函数可由该函数在D的边界∂D上的值唯一确定。

进一步，$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$，$z\in D$，$n=1,2,3$.

由Cauchy积分公式，$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z-\Delta z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\right]$

$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi$

$\therefore \left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi\right|$

$=\frac{|\Delta z|}{2\pi}\left|\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}d\xi\right|$

No.

Date

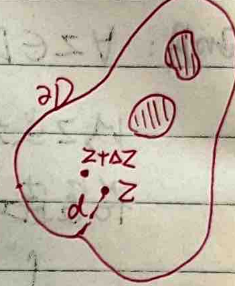
在 ∂D 上，$|f(\xi)|$ 是有界的，设 M 为其上界，$\xi\in\partial D$.

设 d 是 z 到 ∂D 的最短距离，则当 $\xi\in\partial D$ 时，$|\xi-z|\geq d>0$，

且当 $|\Delta z|<\frac{d}{2}$ 时，$|\xi-z-\Delta z|\geq|\xi-z|-|\Delta z|\geq\frac{d}{2}$，故

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{d}{2},\frac{\varepsilon\pi d^3}{Ml}\right\}$，$l$ 为 ∂D 长度，

当 $|\Delta z|<\delta$ 时，原式 $\leq\frac{\delta}{2\pi}\cdot\frac{M}{\frac{d}{2}\cdot d^2}\int_{\partial D}|d\xi|\leq\varepsilon$.



$$\therefore f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi.$$

假设 n 的情况下结论成立，则 $n+1$ 时（上面证明了 $n=1$ 时结论的成立）.

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(z)&=\left[f^{(n)}(z)\right]'\\
&=\frac{n!}{2\pi i\Delta z}\int_{\partial D}\left[\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)^{n+1}}-\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\right]d\xi\\
&=\frac{n!}{2\pi i\Delta z}\int_{\partial D}\frac{\left[(\xi-z)^{n+1}-(\xi-z-\Delta z)^{n+1}\right]}{(\xi-z-\Delta z)^{n+1}(\xi-z)^{n+1}}f(\xi)d\xi\\
&=\frac{n!}{2\pi i\Delta z}\int_{\partial D}\frac{(\xi-z)^{n+1}\left\{1-\left[1-(n+1)\frac{\Delta z}{\xi-z}\right]\right\}}{\left[(\xi-z)^{n+1}\right]^2\left[1-(n+1)\frac{\Delta z}{\xi-z}\right]}f(\xi)d\xi\\
&=\frac{n!}{2\pi i\Delta z}\int_{\partial D}\frac{(n+1)\frac{\Delta z}{\xi-z}}{(\xi-z)^{n+1}\left[1-(n+1)\frac{\Delta z}{\xi-z}\right]}f(\xi)d\xi\\
&=\frac{(n+1)!}{2\pi i\Delta z}\int_{\partial D}\frac{\frac{\Delta z}{\xi-z}\cdot\left[1+(n+1)\frac{\Delta z}{\xi-z}\right]}{(\xi-z)^{n+1}}f(\xi)d\xi\\
&=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+2}}d\xi.
\end{aligned}$$

证毕.

由 Cauchy 积分定理还可知，解析函数在单连通域内的积分与路径无关

且 $\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz=F(z_2)-F(z_1)$.

而且，一个解析函数还是无穷可微的.

（科目：分析） **数 学 作 业 纸**

编号： 班级： 姓名：[illegible] 第 页

1. 级数收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 正项级数收敛的充要条件：$S_n\le M$（有上界）

2. 判别法.

1). Cauchy准则：$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n>N,\ p>N,\ |\sum\limits_{n+1}^{n+p} u_i|<\varepsilon$，充要

2) 比较： $\exists N\ \forall n>N\ u_n\le v_n$ 则$\sum u_n$发散$\sum v_n$发散，$\sum v_n$收敛$\sum u_n$收敛.

常用：比阶. 比较的极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$. $0\le l<+\infty$ $\sum v_n$敛则$\sum u_n$敛，$0<l\le+\infty$，$\sum v_n$散则$\sum u_n$散

3) D'Alembert：比率：$\exists N\ \forall n>N\ \frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 则敛，≥1则散.

比率的极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$，$q<1$敛，$q>1$散.

实质上是与$\sum q^n$比较.

4) Cauchy：根式：$\exists N\ \forall n>N\ \sqrt[n]{u_n}<1$则敛，$>1$则散.

根式的极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，$0<l<1$敛，$l>1$散

实质上是与$\sum l^n$比较.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_2}{u_1}\cdot u_1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{u_n}{u_{n-1}}+\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}+\cdots+\frac{u_2}{u_1}+u_1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}$

∴能Cauchy则能D'Alembert.

5) 积分：$f(x)$ $[1,+\infty)$ 非负递减，则$\sum f(n)=\sum u_n$与$\int_1^\infty f(x)dx$同敛散（$\sum\limits_{n=2}^\infty u_n<\int_1^\infty f(x)dx$）.

6) Raabe：$\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})=r$. $r>1$则$\sum u_n$敛，$r<1$则$\sum u_n$散.

实质上是与$\sum\frac{1}{n^r}$比较.（$\frac{u_{n+1}}{u_n}\overset{n\to\infty}{=\!=}1-\frac{r}{n}\overset{n\to\infty}{=\!=}(1+\frac{1}{n})^{-r}\overset{n\to\infty}{=\!=}(\frac{n}{n+1})^r=\frac{(\frac{1}{n+1})^r}{(\frac{1}{n})^r}$）.

7) Kummer：设$\sum\limits_{n=1}^\infty u_n$是正项级数，$c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$是使级数$\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{c_n}$发散的正数列

设$K_n=c_n-c_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n}$，若$\exists N, A>0, \forall n>N, K_n\ge A$ 则$\sum u_n$敛，$K_n\le0$则$\sum u_n$散.

证明：① $K_n=c_n-c_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge A>0$，即$c_nu_n-c_{n+1}u_{n+1}\ge Au_n$

∴$\{c_nu_n\}$递减，且零是其一个下界 ∴c_nu_n有极限.

∴$\sum\limits_{n=1}^\infty(c_nu_n-c_{n+1}u_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(c_1u_1-c_{n+1}u_{n+1})$收敛.

∴$\sum\limits_{n=1}^\infty Au_n=A\sum\limits_{n=1}^\infty u_n$收敛 ∴$\sum\limits_{n=1}^\infty u_n$收敛.

② $K_n=c_n-c_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n}\le0$ 则 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge\frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$ 时$\sum\frac{1}{c_n}$发散，$\sum u_n$发散.

例：取$c_n=1$，$\sum\frac{1}{1}$散，得D'Alembert判别法

取$c_n=n$，$\sum\frac{1}{n}$散，得Raabe判别法.

取$c_n=n\ln n$，$\sum\limits_{n=2}^\infty\frac{1}{n\ln n}$散，得Bertrand判别法.

3. 交错级数的Leibniz判敛法：

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$ 满足 $u_n\geq u_{n+1}$ 且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

（可先证 S_{2n} 与 S_{2n+1} 收敛再得到 S_n 收敛 也可由Cauchy收敛准则证明）.

绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛（$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为交错级数）.

条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛、$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.（$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都发散）

1). 绝对收敛级数的重排也绝对收敛，且有相同和数S，用D'Alembert和Cauchy直接判断
条件收敛级数的重排可等于任意实数（Riemann）.

2) 绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=U$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=V$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}u_kv_{n-k}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}u_kv_{n-k}\right)$
$=\sum_{n=1}^{\infty}r_n$ 也绝对收敛于 $U\cdot V$.（Cauchy）；条+绝⇒条（反证）；条+条⇒条/绝；绝+绝⇒绝.

4. Abel变换：设 $u_i, v_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为两组实数，$\sigma_k=v_1+v_2+\cdots+v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$
则 $\sum_{i=1}^{n}u_iv_i=\sum_{i=1}^{n-1}(u_i-u_{i+1})\sigma_i+u_n\sigma_n$.

1) 阿贝尔判别法：若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列，且级数 $\sum b_n$ 收敛，则级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

2) 狄利克雷判别法：若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，级数 $\sum b_n$ 的部分和有界，
则 $\sum a_nb_n$ 收敛.

证明：先证Dirichlet。记 $\sum_{k=1}^{n}b_k=B_n$ 因 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 部分和有界，有 $\exists M>0\ \forall n, |B_n|\leq M$
$\forall\varepsilon>0$ ∵ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ∴ $\exists N\ \forall n>N, |a_n|<\frac{\varepsilon}{3M}$.
∴ $\forall m>n>N$，有
$$\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k=(B_{n+1}-B_n)a_{n+1}+(B_{n+2}-B_{n+1})a_{n+2}+\cdots+(B_m-B_{m-1})a_m$$
$$=-B_na_{n+1}+B_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})+\cdots+B_{m-1}(a_{m-1}-a_m)+B_ma_m$$
$$\therefore\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k\right|\leq|B_na_{n+1}|+|B_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})|+\cdots+|B_{m-1}(a_{m-1}-a_m)|+|B_ma_m|$$
$$<M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+M|a_{n+1}-a_{n+2}|+\cdots+M|a_{m-1}-a_m|+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}$$
$$=\frac{\varepsilon}{3}+M(a_{n+1}-a_m)+\frac{\varepsilon}{3}$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+Ma_{n+1}+\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$ 由Cauchy收敛准则得级数收敛.

再证Abel。利用Dirichlet. 因 $\{a_n\}$ 单调有界，$\{a_n\}$ 收敛，记 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$.
$c_n=a_n-A$，则 $\{c_n\}$ 单调趋于0；而 $\sum b_n$ 收敛，故 $\sum b_n$ 部分和有界，由Dirichlet.
$\sum_{n=1}^{\infty}c_nb_n$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_nb_n+Ab_n)$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

对于 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{sn}}{(sn)!}$ 一类的级数求和函数，注意到 $I^{(s)}(x) = I(x)$，
解此微分方程，代入边界条件 $I(0)=1$，$I^{(i)}(0)=0$ $i=1,2\cdots,s-1$.
即可得到和函数的解析表达式.

No.

Date

8. 解析函数的幂级数展开

解析函数 $\Leftrightarrow$ Ω内点点可微 $\Leftrightarrow$ Cauchy-Riemann条件/Cauchy积分定理/幂级数(Laurent级数 & Taylor级数)

△ 复级数： $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, $n>N$时 $|S_n - S(=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k)|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall p,q>N$时 $|\alpha_p-\alpha_q|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\alpha_k=a_k+ib_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 收敛

若 $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$收敛($\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$绝对收敛) $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 收敛.

△复函数项级数：设D是复平面上的一个点集，$f_k(z)$定义在D上，$k=1,2,\cdots$.

$\forall z\in D$, 级数$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)=f_1(z)+\cdots+f_k(z)$收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$ 在D上收敛，和函数 $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$

如果函数项级数在D上的收敛对z是一致的，即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$, 它不依赖于z，当$n>N(\varepsilon)$时，$\forall z\in D$. ~~则$f(z)$在D上一致收敛~~.

$|f(z)-\sum_{k=1}^{n}f_k(z)|<\varepsilon$

则$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z)$在D上一致收敛.

$\Updownarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,y)$, $\sum_{k=1}^{\infty}v_k(x,y)$ 一致收敛

$\Downarrow$

若每一项$f_k(z)$在D上连续则和函数$f(z)$也在D上连续；

若每一项$f_k(z)$在D中某L上连续，则$\int_L f(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int_L f_k(z)dz$；

若每一项$f_k(z)$在D内点点解析，则$f(z)$也在D内解析，$f^{(p)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{(p)}(z)$

$p=1,2,3,\cdots$

No.

Date . .

△ 幂级数/双边幂级数.

每个复幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 都存在一个收敛圆 $|z-a|=R$.

在收敛圆内部，复幂级数绝对收敛

在外部，复幂级数发散

在收敛圆上，可能收敛可能发散.

$\forall\, 0<\varepsilon<R$，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $|z-a|<R-\varepsilon$ 内一致收敛. 收敛圆的半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \text{ 或 } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $|z-a|<R$ 解析，且 $f^{(p)}(z)=p!c_p+(p+1)p\cdots 2(z-a)$
$+\cdots+n(n-1)\cdots(n-p+1)c_n(z-a)^{n-p}+\cdots$

系数满足 $c_p=\frac{f^{(p)}(z)}{p!}$

对于 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z-a)^n$，作 $\zeta=\frac{1}{z-a}$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z-a)^n=c_{-1}\zeta+c_{-2}\zeta^2+\cdots+c_{-n}\zeta^n+\cdots$

$|\zeta|=\left|\frac{1}{z-a}\right|<\frac{1}{r}$ $(0<\frac{1}{r}<+\infty)$，即 $|z-a|>r$ 时，$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 收敛.

综上，$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 收敛，收敛域为

$r<|z-a|<R$.

Laurent定理：在圆环域 H: $r<|z-a|<R$ $(0\le r<R<+\infty)$ 内解析的函数必可展成双边幂级数 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$，$n=0,\pm1,\cdots$

L^+ 为圆周 $|\zeta-a|=\rho$ $(r<\rho<R)$，逆时针为正.

证明：$\forall\, z\in H$：$r<|z-a|<R$ 总可找到 ρ_1、ρ_2，$r<\rho_1<\rho_2<R$. 记

L_1^+: $|\zeta-a|=\rho_1$，L_2^+: $|\zeta-a|=\rho_2$ 均以逆时针为正向.

则 $f(z)$ 在 $\rho_1\le|z-a|\le\rho_2$ 上解析

No.

Date

由Cauchy积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

1) 对于第一个积分：

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)}=\frac{f(\xi)}{\xi-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}$$

当$\xi\in L_2$时，$|\xi-a|=\rho_2>|z-a|$，即$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|<1$

$$\therefore \frac{f(\xi)}{\xi-z}=\frac{f(\xi)}{\xi-a}\left(1-\frac{z-a}{\xi-a}\right)^{-1}=\frac{f(\xi)}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n \quad (等比数列)$$

该幂级数在$|\xi-a|=\rho_2$上一致收敛，可逐项积分，

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2^+}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\cdot d\xi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \quad \left(C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$$

2) 对于第二个积分：

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=-\frac{f(\xi)}{(z-a)-(\xi-a)}=-\frac{f(\xi)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}}.$$

当$\xi\in L_1$时，$|\xi-a|=\rho_1<|z-a|$，即$\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right|<1$

$$\therefore \frac{f(\xi)}{\xi-z}=-\frac{f(\xi)}{z-a}\left(1-\frac{\xi-a}{z-a}\right)^{-1}=-\frac{f(\xi)}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^n \quad (等比数列).$$

该幂级数在$|\xi-a|=\rho_1$上一致收敛，可逐项积分，

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^n}f(\xi)(\xi-a)^{n-1}d\xi=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}.$$

$$\left(C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}d\xi\right)$$

No.

Date

综上，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$

解析函数的Laurent展开是唯一的.

当$f(z)$在$|z-a|<R$内解析时，$c_n=0\ (n=-1,-2,\cdots)$，则$f(z)$所展开的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

其中$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$，$n=0,1,2,\cdots$

是圆域$0<|z-a|<R$内解析函数的Taylor展开.

eg: $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，$(|z|<+\infty)$

$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$(|z|<+\infty)$

$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$，$(|z|<+\infty)$

$(1+z)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$，$(|z|<1)$

△解析函数的零点与孤立奇点.

设$f(z)$ Laurent展开的收敛域为 $r<|z-a|<R$，则在两个圆周 $|z-a|=r$，$|z-a|=R$上均至少存在$f(z)$的一个奇点；特殊地，$f(z)$若能Taylor展开，收敛域为 $|z-a|<R$，则在$|z-a|=R$上至少有$f(z)$一个奇点它是离a点最近的奇点之一.

由上定理，可通过$f(z)$的奇点分布得到Laurent (Taylor) 级数的收敛域.

m阶零点：设$f(z)$在圆域$|z-a|<R$内解析且不恒为零，则$f(z)$ Taylor展式

$f(z)=c_m(z-a)^m+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+\cdots=(z-a)^m\left[c_m+c_{m+1}(z-a)+\cdots\right]$

$=(z-a)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$在$z=a$处解析，$a_m\neq 0$，a为$f(z)$一零点

则a为$f(z)$ m阶零点

No.

Date

可去奇点：在 $0<|z-a|<R$ 内 Laurent 展开 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n$

$n=1,2,3,\cdots$ 时 $C_{-n}=0$。

eg. $\frac{\sin z}{z}$

m阶极点：$n=m+1, m+2, \cdots$ 时，$C_{-n}=0$，$C_{-m}\neq 0$。

eg. $\frac{\cos z}{z}$ 一阶极点

~~本性~~ $f(z)=C_{-m}(z-a)^{-m}+\cdots+C_0+C_1(z-a)+\cdots+C_n(z-a)^n+\cdots$，$a$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的m阶零点

本性极点：有无穷多个 C_{-m} 不等于零

eg. $e^{\frac{1}{z}}$

留数：设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则 $\exists R>0$，在 $0<|z-a|<R$ 内 $f(z)$ 解析

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n$$

其中 $C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+} f(z)dz$。　　$L^+: |z-a|=\rho$，$(0<\rho<R)$。

称 C_{-1} 为 $f(z)$ 在 a 点的留数，$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$。由Cauchy积分定理知 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$ 与 ρ 无关

留数定理：L^+ 是 C 上闭路径，$f(z)$ 在 L 所围区域 D 内除有限奇点 $a_1,\cdots,a_n$

外解析，且在 $\bar{D}\setminus\{a_1,\cdots,a_n\}$ 上连续，则

$$\oint_{L^+} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k^+} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_k^+} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

若 a 为 $f(z)$ 的孤立m阶极点，则 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$。其中

$\varphi(z)$ 在 $z=a$ 点解析且 $\varphi(a)\neq 0$。则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}dz=\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

对数留数：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$，是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的留数。

1) 若 a 为 $f(z)$ 的n阶零点，则 $\operatorname*{Res}_{z=a}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=n$

2) 若 b 为 $f(z)$ 的m阶极点，则 $\operatorname*{Res}_{z=b}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=-m$

No.

Date

辐角原理：设L为闭路径，$f(z)$在L上解析且不为零，$f(z)$在L内除有限个极点外是解析的，则 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N(f,L) - P(f,L)$

$N(f,L)$：L内部零点个数（n阶零点算n个零点）

$P(f,L)$：L内部极点个数（m阶极点算m个极点）

若$f(z)$在L内解析（无极点），则 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N(f,L) = n$

$= \underset{z=a}{\mathrm{Res}}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{d}{dz}[\ln f(z)]\cdot dz.$

故对数留数反映了当z从L的某一点z_0出发，沿L逆时针绕行一周回到z_0点时$\ln f(z)$的改变值。设在z_0点，$\ln f(z)$的实部、虚部分别为$\ln|f(z_0)|$、φ_0，绕一周后实部仍为$\ln|f(z_0)|$，虚部为φ_1

$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\{[\ln|f(z_0)|+i\varphi_1] - [\ln|f(z_0)|+i\varphi_0]\}$

$= \frac{\varphi_1-\varphi_0}{2\pi}$

$= \frac{\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)}{2\pi}$

$= N(f,L) - P(f,L)$

若$f(z)$在L内解析（无极点），则 $\frac{\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)}{2\pi} = N(f,L)$.

Rouche定理：设L为一闭路径，函数$f(z)$及$\varphi(z)$满足条件：

(1) 它们在L上及其内部解析.

(2) 在L上，$|f(z)| > |\varphi(z)|$.

则在L内部，$f(z)$与$f(z)+\varphi(z)$零点个数相同

证明：$f(z)+\varphi(z) = f(z)\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$

故 $\Delta_L \operatorname{Arg}[f(z)+\varphi(z)] = \Delta_L \operatorname{Arg} f(z) + \Delta_L \operatorname{Arg}\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$

而 $|f(z)| > |\varphi(z)|$. 当z沿L变时，$1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$的曲线$L$在圆$|w-1|<1$内，没有绕原点变化 $\therefore \Delta_L \operatorname{Arg}\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right] = 0$

即 $\Delta_L \operatorname{Arg}[f(z)+\varphi(z)] = \Delta_L \operatorname{Arg} f(z) = N(f,L) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$

六. 常微分方程

1. 二阶线性常微分方程.

①齐次二阶线性常微分方程解的结构.

设 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的任意两个解为 y_1, y_2, 则 $\angle\{y_1,y_2\}$ 是关于函数加法和数乘的线性空间 (rank=2)

即 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关.

否则 $W(y_1,y_2)=W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=0$

②非齐次二阶线性常微分方程解的结构.

设 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的两个解是 $z_1(x)$、$z_2(x)$

∴ $z_1''(x)+p(x)z_1'(x)+q(x)z_1(x)=f(x)$

$z_2''(x)+p(x)z_2'(x)+q(x)z_2(x)=f(x)$

∴ $[z_1(x)-z_2(x)]''+p(x)[z_1(x)-z_2(x)]'+q(x)[z_1(x)-z_2(x)]=0$

即 $z_1(x)-z_2(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解

∴ $z_1(x)-z_2(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ $y_1(x)$ $y_2(x)$ 线性无关.

∴ 非齐次方程的通解 $z(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+z_0(x)$

其中 $z_0(x)$ 为非齐次方程的特解.

1) 由齐次方程的一个非零特解构造出与之线性无关的另一个解.

设 y_1 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个非零特解, y_2 是与 y_1 无关的解.

∵ $\frac{y_2}{y_1}\neq$ 常数

∴ 可设 $y_2=C(x)y_1$

∴ $y_2'=C'(x)y_1+C(x)y_1'$

$y_2''=C''(x)y_1+2C'(x)y_1'+C(x)y_1''$

上式代入原方程, 得

$C(x)(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)+$ [illegible] $y_1'+p(x)y_1)+C''(x)y_1=0$

∵ $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$

No.

Date

∴原方程变为 $(2y_1'+p(x)y_1)C'(x)+y_1C''(x)=0$

解得 $C'(x)=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$

∴ $C(x)=\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$

∴ $y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$

2) 由齐次方程的两个线性无关解，构造出非齐次方程的一个特解.

设非齐次的特解为 $z_0=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$，$C_1(x)$、$C_2(x)$线性相关.

则 $z_0'(x)=C_1'(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x)$

$$\Big\Downarrow\ (C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)\triangleq 0)$$

$z_0''(x)=C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)$

将 z_0、z_0'、z_0'' 代入非齐次方程，得 $C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)$!

又∵ $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$

∴ $C_1'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}$

$C_2'(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$

∴ $z_0=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{-y_2(t)y_1(x)+y_1(t)y_2(x)}{W(t)}\cdot f(t)\,dt.$

③ 齐次方程求解

$y''+py'+qy=0$

设 $y=e^{\lambda x}$，代入得 $(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$

1) $\Delta>0$，$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

2) $\Delta<0$，$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$. ∴ $y=e^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)$

重新组合，得 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

3) $\Delta=0$，$y_1=e^{-\frac{p}{2}x}$，由解的构造方法，得 $y_2=xe^{-\frac{p}{2}x}$

$\therefore y = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{p}{2}x}$

更高阶的方程也可如此求解。

④ 非齐次方程求解.

一般地，可由 $z_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{-y_2(t) y_1(x) + y_1(t) y_2(x)}{W(t)} \cdot f(t) \cdot dt$，$z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + z_0$ 给出

特殊地，设非齐次项 $f(x) = P_n(x) e^{\mu x}$（μ是复常数）（P_n是n次多项式）.

1) μ不是齐次方程的特征根，则非齐次微分方程有形如

$$z_0 = Q_n(x) e^{\mu x}$$

2) μ是齐次方程的一重特征根，则

$$z_0 = x Q_n(x) e^{\mu x}$$

3) μ是齐次方程的二重特征根，则

$$z_0 = x^2 Q_n(x) e^{\mu x}$$

将特解 $z_0(x)$ 代入非齐次方程，通过比较系数得到待定的 $Q_n(x)$.

若对于 $y'' + py' + qy = f(x)$，$f(x) = Re[f_1(x) + f_2(x)]$（当然，也满足 $P_n(x) e^{\mu x}$）

只要分别求两个方程 $f_1(x) = y'' + py' + qy$

$f_2(x) = y'' + py' + qy$

的特解 $z_1(x)$ & $z_2(x)$，则 $Re[z_1(x) + z_2(x)]$ 是非齐次方程的特解.

对于Euler方程 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{(i)} = 0$，作变换 $t = \ln x$ 可得一个齐次方程（常系数）

No.

Date

2. 一阶线性常微分方程组

$\vec{y}' = A(x)\vec{y}' + \vec{f}(x)$

$\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，$A(x) = (a_{ij}(x))_{n\times n}$，$\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))^T$

二阶非齐次线性常微分方程是一阶线性方程组的特例.

① 一阶线性常微分方程组解的结构.

由n个方程、n个未知函数组成的一阶线性齐次常微分方程组的解集合L是一个线性空间，维数为n.

非齐次方程组的通解可写成相应齐次方程组的通解加非齐次方程组的某特解.

② 常系数一阶方程组的求解.

设 $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{f}(x)$ 对应的齐次方程 $\vec{y}' = A\vec{y}$ 的解为 $\vec{y} = \vec{r}e^{\lambda x}$. 回代得 $(A - \lambda E)\vec{r} = \vec{0}$.

∴ λ 是A的特征值，$\vec{r}$ 是A的特征向量.

1) 特征值 λ_1, λ_2 不相等.

相应特征向量 $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ 线性无关，$\vec{y}' = A\vec{y}$ 有两个基本解 $\vec{r_1}e^{\lambda_1 x}$ 和 $\vec{r_2}e^{\lambda_2 x}$

通解为 $\vec{y} = C_1\vec{r_1}e^{\lambda_1 x} + C_2\vec{r_2}e^{\lambda_2 x}$.

$\vec{y}(x)$ 可能是复值函数，此时需适当线性组合两个基本解.

2). 特征值 $\lambda_1 = \lambda_2$.

可设解 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 \\ a_2 x + b_2 \end{bmatrix} e^{\lambda x}$ 代入解出 a_1, a_2, b_1, b_2.

对于方程数更多的方程组，按上两条规则类推.

No.

Date

△常数变易法：

对 $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{f}(x)$，设 $\vec{y} = C(x)\vec{\varphi}(x)$，代入原方程，得

$$\vec{\varphi}'(x)C(x) + \vec{\varphi}(x)C'(x) = A\vec{\varphi}(x)C(x) + \vec{f}(x).$$

$\because \vec{\varphi}'(x) = A\vec{\varphi}(x)$

$\therefore \vec{\varphi}'(x)C(x) = A\vec{\varphi}(x)C(x)$

$\therefore \vec{\varphi}(x)C'(x) = \vec{f}(x).$

$\therefore C'(x) = \vec{\varphi}^{-1}(x)\cdot\vec{f}(x)$

$\therefore C(x) = \int_{x_0}^{x}\vec{\varphi}^{-1}(x)\cdot\vec{f}(x)\cdot dx + C$

No.

Date

七、傅立叶分析、拉普拉斯变换

1. 正交函数系 $\{1, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x \cdots\}$

基的模 $|e_n| = \sqrt{\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi}{l}x\,dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}(1+\cos\frac{2n\pi}{l}x)\,dx} = \sqrt{l}$

$= \sqrt{\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi}{l}x\,dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}(1-\cos\frac{2n\pi}{l}x)\,dx} = \sqrt{l}$.

$|e_1| = \sqrt{\int_{-l}^{l}1^2\cdot dx} = \sqrt{2l}$.

$\therefore f(x) = \frac{1}{e_1^2}\langle f(x), e_1\rangle e_1 + \frac{1}{e_2^2}\langle f(x), e_2\rangle e_2 + \cdots + \frac{1}{e_n^2}\langle f(x), e_n\rangle e_n + \cdots$

$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$ (在f的连续点).

其中 $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$, $n = 1, 2, \cdots$

2. Fourier 积分公式.

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$

$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\left(\cos\frac{n\pi}{l}t\cos\frac{n\pi}{l}x + \sin\frac{n\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x\right)dt$

$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\,dt$

记 $u_n = \frac{n\pi}{l}$, $\Delta u_n = u_n - u_{n-1} = \frac{\pi}{l}$.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos u_n(x-t)\,dt$

$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{-l}^{l}f(t)\cos u_n(x-t)\,dt\right\}\Delta u_n$

当 $l\to+\infty$ 时, $\Delta u_n\to 0$, 故上式化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos u_n(x-t)\,dt\right\}\Delta u_n = \int_0^{+\infty}\varphi(u)\,du$

$\therefore f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt \quad -\infty < x < +\infty$.

$= \int_0^{+\infty}\left\{\cos ux\cdot\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt\right] + \sin ux\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt\right]\right\}du$

$= \int_0^{+\infty}\left[a(u)\cos ux + b(u)\sin ux\right]du$.

No.

Date

3. Fourier变换.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt$$ （$\cos u(x-t)$是u的偶函数）.

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos u(x-t)+i\sin u(x-t)]dt$$ （$\sin u(x-t)$是u的奇函数）

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{iu(x-t)}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{uxi}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-uti}dt.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)\,e^{iux}du.$$

称$F(u)$是$f(x)$的Fourier变换，$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-iut}dt$，记作$F(u)=F[f(x)]$

称$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{iux}du$是Fourier逆变换式，记作$f(x)=F^{-1}[F(u)]$.

微分性质：设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是绝对可积的连续函数，并且它的一阶导数也满足狄利克雷条件，则 $F[f'(x)]=iu\,F[f(x)]$.

$$F[f'(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\cdot e^{-iux}dx=f(x)\,e^{-iux}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+iu\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iux}dx$$

$$=iu\,F[f(x)].$$

（$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$）

$\therefore F[f^{(n)}(x)]=(iu)^n F[f(x)]$.

$$F\left[\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\right]=\frac{1}{iu}F[f(x)]$$

且 $\frac{d^nF(u)}{du^n}=F[(-ix)^n f(x)]$.

卷积性质：设$f_1(x)$、$f_2(x)$都在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积并满足狄利克雷条件.

且 $F[f_1(x)]=F_1(u)$，$F[f_2(x)]=F_2(u)$，则 $F[f_1(x)*f_2(x)]=F_1(u)F_2(u)$

f_1与f_2的卷积：$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)f_2(x-y)dy$.

No.

Date

$$F[f_1(x)*f_2(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)*f_2(x)]e^{-iux}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(x-y)dy\right]e^{-iux}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)e^{-iuy} f_2(x-y)e^{-iu(x-y)}dydx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)e^{-iuy}dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-y)e^{-iu(x-y)}dx$$
$$= F_1(u)F_2(u).$$

$\therefore f_1(x)*f_2(x) = F^{-1}[F_1(u)F_2(u)]$.

4. 拉普拉斯变换.

设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 内有定义，且 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ 在 p 的某个区域内收敛，其中 p 为复参数，则这个积分在上述区域内就确定了一个 p 的函数 $F(p)$

$$F(p) = L[f(t)]$$
$$f(t) = L^{-1}[F(p)].$$

微分性质：设 $f(t)$ 及 $f'(t)$ 都存在拉普拉斯变换，且 $L[f(t)] = F(p)$，则

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(0)$$
$$L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$
$$= -f(0) + pF(p),\quad Re(p) > c.$$

一般地，$L[f^{(n)}(t)] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

若 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$，则

$$L[f^{(n)}(t)] = p^nF(p).$$

积分性质：设 $f(t)$ 与 $\int_0^t f(\tau)d\tau$ 都存在拉普拉斯变换，且 $L[f(t)] = F(p)$，则

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p}F(p).$$

No.

Date

令 $h(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$，则 $h(0)=0$，$h'(t)=f(t)$

由微分性质，$L[f(t)]=L[h'(t)]=pL[\int_0^t f(\tau)d\tau]$

$\therefore L[\int_0^t f(\tau)d\tau]=\frac{1}{p}L[f(t)]=\frac{1}{p}F(p)$.

5. 拉普拉斯变换的反演.

若已知 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(p)$，即 $L[f(t)]=F(p)$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(p)e^{pt}dp,\quad t>0.$$

若 $p_1,\cdots,p_n$ 是 $F(p)$ 的所有奇点，并且当 $p\to\infty$ 时，$F(p)\to 0$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\underset{p=p_k}{\mathrm{Res}}[F(p)e^{pt}]$$

$$\begin{aligned}
L[f_1(t)*f_2(t)]&=\int_0^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]e^{-pt}dt\\
&=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-pt}dt\\
&=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-pt}dt\right]d\tau\\
&=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\int_0^{+\infty}f_2(s)e^{-p(\tau+s)}ds\,d\tau\\
&=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\cdot\int_0^{+\infty}f_2(s)e^{-ps}ds\\
&=F_1(p)F_2(p).
\end{aligned}$$

No.

Date

八. 关于实数系完备性的基本定理.

1. 致密性定理（Bolzano）

有界数列必有收敛子列

2. 单调有界定理

有界单调数列必收敛.

3. 区间套定理

若闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件：(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，$n=1,2,\cdots$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，则惟一地存在属于所有闭区间 $[a_n, b_n]$ ($n=1,2,\cdots$) 的点 ξ.

4. 有限覆盖定理

从 $[a,b]$ 的任一开覆盖中可取出 $[a,b]$ 的有限开覆盖.

5. 聚点定理

有界无穷点集至少有一个聚点.

6. 确界原理

有上界（下界）的数集必有上确界（下确界）.

7. 完备性定理（Cauchy）

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$，$\forall n, m > N$，有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

6→2： 确界 → 单调有界.

证明：只证单调减少情形.

设数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有界，故 $\{a_n\}$ 有下确界，记 $A = \inf\{a_n\}$.

$\therefore \forall n, a_n \geq A$ ； $\forall \varepsilon > 0, \exists N, a_N < A + \varepsilon$.

又 $\because \{a_n\}$ 单调减，$\therefore \forall n > N$，$a_n \leq a_N < A + \varepsilon$

$\therefore |a_n - A| < \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

No.

Date . .

2→3：单调有界→区间套

证明：由已知，$\{a_n\}$单调增 $\{b_n\}$单调减，且b_1是$\{a_n\}$的一个上界，a_1为$\{b_n\}$的一个下界，由单调有界定理，$\{a_n\}\{b_n\}$都收敛

记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ $\quad\therefore A=B$

$\because \forall n$，$a_n\le A$，$\forall\varepsilon$，$\exists N$，$a_n>A-\varepsilon$.

$\therefore A=\sup a_n$，同理 $B=\inf b_n$.

又 $\forall m,n$，$a_m\le b_n$，

即$\forall n$有b_n是$\{a_n\}$的上界，a_n是$\{b_n\}$的下界

$\therefore \forall n$，$A\le b_n$，$a_n\le B$，即$\forall n$有$a_n\le A\le b_n$

$\therefore A\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$

假设$\mu\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，则$\forall n$有$a_n\le\mu\le b_n$

由极限的保序性，$A\le\mu\le A$，$\mu=A$.

3→1：区间套→致密(Bolzano)

证明：设$\{x_n\}$有界 $\therefore\exists a_1,b_1$，使$\forall n$有$x_n\in[a_1,b_1]$.

任意取定$x_{n_1}\in[a_1,b_1]$，分区间$[a_1,b_1]$为$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$

则其中至少有一个含有数列$\{x_n\}$中无穷多项，取其中含有$\{x_n\}$中无穷多项的一个区间记为$[a_2,b_2]$，$b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}$.

任取$x_{n_2}\in[a_2,b_2]$，$n_2>n_1$，……

如此产生区间套$\{[a_n,b_n]\}$ （$\{[a_{n+1},b_{n+1}]\}$是$\{[a_n,b_n]\}$的一半）

和$\{x_n\}$的一个子列，满足$x_{n_k}\in[a_k,b_k]$.

由区间套定理，$\exists!\, c\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，所以$\{x_{n_k}\}$收敛于c.

（$|x_{n_k}-c|\le|b_k-a_k|=|b_1-a_1|/2^{k-1}$

$\forall\varepsilon>0$，要使$|x_{n_k}-c|<\varepsilon$，只要$\frac{|b_1-a_1|}{2^{k-1}}<\varepsilon$.）

No.

Date

1→7：致密（Bolzano）→完备（Cauchy）

证明：必要性．

设$\{x_n\}$收敛，则$\forall \varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n>N$有$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

当$m,n>N$时，有$|x_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而有

$|x_m-x_n|\le|x_m-A|+|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$；

充分性．

设$\{x_n\}$为Cauchy列．则对于正数$\varepsilon=1$存在$N_1>0$，$\forall m>n>N_1$，有

$|x_m-x_n|<1$．

∴$\forall n>N_1$，有$|x_n-x_{N_1+1}|<1$，$|x_n|<|x_{N_1+1}|+1$

所以数列$\{x_n\}$有界，有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，记$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2>0\ \forall k>N_2$有$|x_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，$\exists N_3>0$，$\forall m>n>N_3$有$|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

取$N=\max(N_2+1,N_3+1)$

当$n>N$时有$n_N>N>N_3$

∴$|x_n-A|\le|x_n-x_{n_N}|+|x_{n_N}-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

∴$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$．

3→4：区间套→有限覆盖

证明：假设不然，即$[a,b]$不能被$\Sigma=\{\sigma\}$中有限个开区间覆盖，

将区间$[a,b]$等分为两半，则至少有一半不能被Σ中有限个开区间

覆盖，将这样的一半记作$[a_1,b_1]$（若两半都如此，任取其一）．

再将$[a_1,b_1]$等分为两半，至少也有一半不能被Σ中有限个开区间

覆盖，将此记作$[a_2,b_2]$、依此类推．

这样得到区间套$\{[a_k,b_k]\}$，由区间套定理知，

$\exists!\ c\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$．

又∵Σ覆盖区间$[a,b]$，所以$\exists\sigma\in\Sigma$使得$c\in\sigma$．

∵$\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=0$，$c\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$　∴$\exists k$使$[a_k,b_k]\subset\sigma$，与区间套构成方式矛盾

No.

Date

~~6→2~~：2→6：单调有界→确界

证明：设A是一个非空实数集，有上界。

不妨设A的某个元素不是自己的上界，记为 a_1.

A的一个上界记作 b_1，令 $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$，

若 c_1 是A的一个上界，则令 $a_2=a_1$，$b_2=c_1$；否则令 $a_2=c_1$，$b_2=b_1$.

令 $c_2=\frac{a_2+b_2}{2}$，……

如此，得到一个数列 $\{b_n\}$ 其每一项都是A的一个上界，且单调减，

有下界 a_1，由单调有界收敛定理，$\{b_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=s$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=s$.

$\forall x\in A\ \forall n\ x\le b_n$ 由保序性 $\forall x\in A\ x\le s$

$\forall \varepsilon>0$，$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n=s$，$\therefore \exists N\in\mathbb{N}^+$，$\forall n>N\ |a_n-s|<\varepsilon$，$a_{N+1}>s-\varepsilon$

因为 a_{N+1} 不是A的上界，所以 $\exists x\in A\ x>a_{N+1}>s-\varepsilon$.

$\therefore$ s是上确界.

4→1：有限覆盖→致密(Bolzano)

证明：假设数列 $\{x_n\}$ 有界，a为下界 b为上界，但 $\{x_n\}$ 没有收敛子列.

$\therefore \forall A\in[a,b]\ \exists \varepsilon_A>0$，$(A-\varepsilon_A,A+\varepsilon_A)$ 中只含 $\{x_n\}$ 中有限项，

$[a,b]\subseteq \bigcup\limits_{A\in[a,b]}(A-\varepsilon_A,A+\varepsilon_A)$，

由有限覆盖定理，存在有限个 $A_1,\cdots,A_m$ 使 $[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}(A_i-\varepsilon_{A_i},A_i+\varepsilon_{A_i})$

$\because$ 每个开区间 $(A_i-\varepsilon_{A_i},A_i+\varepsilon_{A_i})$ 中只含 $\{x_n\}$ 中有限项，

$\therefore \bigcup\limits_{i=1}^{m}(A_i-\varepsilon_{A_i},A_i+\varepsilon_{A_i})$ 中只含 $\{x_n\}$ 中有限项，

$\therefore [a,b]$ 中只含 $\{x_n\}$ 中有限项

与 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 中矛盾！

1→4：致密(Bolzano)→有限覆盖.

证明：与3→4的证明类似，由构成区间套的 a_n b_n 得到 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k}=c$.

No.

Date . . .

7 → 2：完备(Cauchy) → 单调有界

证明：假设数列$\{a_n\}$单调增加且有上界，但发散.

由Cauchy收敛准则，$\exists \varepsilon>0$，$\forall N$，$\exists m,n>N$，$|a_m-a_n|>\varepsilon$.

对于$N=1$，$\exists m_1>n_1>1$，$|a_{m_1}-a_{n_1}|>\varepsilon$

对于$N=m_1$，$\exists m_2>n_2>m_1$，$|a_{m_2}-a_{n_2}|>\varepsilon$

对于$N=m_2$，$\exists m_3>n_3>m_2$，$|a_{m_3}-a_{n_3}|>\varepsilon$

……

$\because \{a_n\}$单调增.

$\therefore \forall k\in N^+$，$a_{m_k}>a_{n_k}+\varepsilon \geq a_{m_{k-1}}+\varepsilon > (a_{n_{k-1}}+\varepsilon)+\varepsilon = a_{n_{k-1}}+2\varepsilon$

$\geq a_{m_{k-2}}+2\varepsilon > \cdots > a_{m_1}+(k-1)\varepsilon$

$\because \varepsilon$给定，k可趋于∞

$\therefore \{a_{m_k}\}$无界，与假设矛盾.

1 → 5：致密(Bolzano) → 聚点

证明：设A是有界无穷集，任取$x_1\in A$.

$A\setminus\{x_1\}$是有界无穷集，任取$x_2\in A\setminus\{x_1\}$

$A\setminus\{x_1,x_2\}$是有界无穷集，任取$x_3\in A\setminus\{x_1,x_2\}$.

……

数列$\{x_n\}$有界，从而有收敛子列，记$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$.

$\therefore \forall \delta>0$，$\exists K$，$\forall k>K$，$|x_{n_k}-a|<\delta$

即a的δ邻域含有A中无穷多个点$x_{n_{K+1}}, x_{n_{K+2}}, \cdots$

5 → 1：聚点 → 致密(Bolzano)

证明：设$\{x_n\}$是有界数列，记$A=\{x \mid \exists n使得x=x_n\}$

1) A是有限集，此时$\{x_n\}$中有无穷多项相等，这些项组成收敛常数列

2) A是无限集，此时A有聚点

No.

Date . .

记 a 是 A 的一个聚点，任取 $\{x_n\}$ 的一项，记作 x_{n_1}.

令 $\delta_2=\min(\frac{1}{2},|a-x_{n_1}|)$，在 a 的 δ_2 邻域中取 $\{x_n\}$ 中标号大于 n_1 的一项

记作 x_{n_2}. 令 $\delta_3=\min(\frac{1}{3},|a-x_{n_2}|)$，在 a 的 δ_3 邻域中取 $\{x_n\}$ 中

标号大于 n_2 的一项，记作 x_{n_3} ……

这样得到的子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 a，因为

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，$\frac{1}{N}<\varepsilon$

$\therefore \forall k>N$，$|x_{n_k}-a|<\frac{1}{k}<\frac{1}{N}<\varepsilon$.

4 → 5：有限覆盖 → 聚点.

证明：设有界无穷点集 $S\subset[-M,M]$，$\therefore S$ 若有聚点则必含于 $[-M,M]$ 内.

现假设 $[-M,M]$ 内每一点都不是 S 的聚点，

则 $\forall x\in[-M,M]$，$\exists \delta_x>0$，使 $U(x;\delta_x)\cap S$ 为有限点集. 记

$$H=\{U(x;\delta_x)\mid x\in[-M,M]\},$$

则 H 为 $[-M,M]$ 的一个开覆盖，由有限覆盖定理，$\exists n$

$$S\subset[-M,M]\subset\bigcup_{i=1}^{n}U(x_i;\delta_i)$$

$\because U(x_i;\delta_i)\cap S$ 为有限点集 $(i=1,2,\cdots,n)$

$\therefore$ 由上式，S 为有限点集，与假设矛盾.

No.

Date

九. 闭区间上连续函数的性质.

1. 有界性—最值定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且 $\exists\, \xi,\eta \in [a,b]$

$\forall x\in[a,b]$，有 $f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$.

证明：对于 $\varepsilon=1$，由于 $f(x)\in C[a,b]$，

$\therefore \forall x_0\in[a,b]$，$\exists\, \delta_{x_0}>0$，$\forall x\in(x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0})\cap[a,b]$.

$|f(x)-f(x_0)|<1$，$|f(x)|<|f(x_0)|+1$

$\therefore \bigcup_{x_0\in[a,b]}(x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0})$ 构成对 $[a,b]$ 的一个开覆盖

$\therefore$ 存在有限个 $x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}$，使

$[a,b]\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}(x_{0k}-\delta_{x_{0k}}, x_{0k}+\delta_{x_{0k}})$

$\therefore |f(x)|\le \max_{1\le k\le n}\{|f(x_{0k})|+1\}$ 有界

下面证明 $f(x)$ 有最小值.

由确界原理，$f(x)$ 有~~上确~~下确界，记 $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$

$\therefore \forall n\in N^+$，$\exists x_n\in[a,b]$，使得 $f(x_n)<m+\frac{1}{n}$

又 $\because \{x_n\}\subseteq[a,b]$ 有界，

$\therefore$ 有收敛子列，记作 $\{x_{n_k}\}$，记 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi\ (\in[a,b])$

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$\therefore \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\xi)$

$\because f(x_n)<m+\frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})\le \lim_{k\to\infty}(m+\frac{1}{n_k})=m$ 即 $f(\xi)\le m$.

又 $\because m$ 是下确界 $m\le f(\xi)$

$\therefore f(\xi)=m$. 有最值.

2. 零点存在—介值定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\ne f(b)$，则 $\forall \mu\in(f(a),f(b))$（或 $(f(b),f(a))$）

$\exists\, \xi\in(a,b)$，$f(\xi)=\mu$.

No.

Date

证明：记 $a_1=a, b_1=b$，取 $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$

若 $f(c_1)=0$，取 $\xi=c_1$ 即得证

若 $f(c_1)<0$，取 $a_2=c_1, b_2=b_1$；

若 $f(c_1)>0$，取 $a_2=a_1, b_2=c_1$　取 $c_2=\frac{a_2+b_2}{2}$ ……

或者在某一步取得 ξ 满足 $f(\xi)=0$，或者产生一个区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，

满足 $\forall n$ 有 $f(a_n)<0$，$f(b_n)>0$，由区间套定理，

$\exists \xi=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$，$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\le 0$，$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)\ge 0$

$\therefore f(\xi)=0$

以上证明了零点存在原理，下证连续函数介值定理。

$\because f(x)\in C[a,b]$　$\therefore g(x)=f(x)-\mu\in C[a,b]$

而 $g(a)g(b)<0$

由零点存在定理知 $\exists\xi\in(a,b)$　$g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\mu$。

3. 一致连续性定理（康托尔）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上一致连续。

证明：$\forall\varepsilon>0$　$\forall x_0\in[a,b]$　$\exists\delta_{x_0}>0$，$x\in(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_{x_0})\cap[a,b]$ 时

$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

而 $[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{x_0\in[a,b]}(x_0-\frac{\delta_{x_0}}{3},x_0+\frac{\delta_{x_0}}{3})$，

$\therefore\exists x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n}$，$[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{n}(x_{0k}-\frac{\delta_{x_{0k}}}{3},x_{0k}+\frac{\delta_{x_{0k}}}{3})$

令 $\delta=\min\limits_{1\le k\le n}(\frac{\delta_{0k}}{3})$，当 $|x-t|<\delta$ 时，$\exists l,m\in\{1,2,\cdots,n\}$

$x\in(x_{0l}-\frac{\delta_{x_{0l}}}{3},x_{0l}+\frac{\delta_{x_{0l}}}{3})$，$t\in(x_{0m}-\frac{\delta_{x_{0m}}}{3},x_{0m}+\frac{\delta_{x_{0m}}}{3})$

不妨设 $\delta_{x_{0l}}\le\delta_{x_{0m}}$，则 $x_{0l}\in(x_{0m}-\delta_{x_{0m}},x_{0m}+\delta_{x_{0m}})$

从而有 $|f(x)-f(t)|\le|f(x)-f(x_{0l})|+|f(t)-f(x_{0m})|+|f(x_{0l})-f(x_{0m})|$

$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

No.

Date

十. Riemann 积分

1. 若有限点集 $T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\subset[a,b]$，且满足 $a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_n=b$，则点集 T 是区间 $[a,b]$ 的一个划分。每个区间 $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,\dots,n)$ 为 $[a,b]$ 的一个子区间。$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ 为子区间长度。$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$ 为划分 T 的直径。

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，对于 $[a,b]$ 的任意划分 $T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$，任意取点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,\dots,n)$，若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在，则 $f(x)\in R[a,b]$.

$\exists I\in R\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T_{[a,b]}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\ \forall\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，只要 $\lambda<\delta$，就有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon$. （定义）

∴不可积表述为：

$\forall I\in R\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists T_{[a,b]}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\ \exists\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，若 $\lambda<\delta$，有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|>\varepsilon$.

2. 可积函数的一个必要条件：

若 $f(x)\in R[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界！

证明：由于 $f(x)\in R[a,b]$，对于 $[a,b]$ 的任意划分 T 及任意取点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ 只要直径 $\lambda<\delta_0$ 就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-\int_a^b f(x)dx\right|<1$$

∴ $\lambda<\delta_0$ 时，所有积分和式有界。

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界。则对 $[a,b]$ 的任意一个直径小于 δ_0 的划分 $f(x)$ 至少在其中一个子区间上无界，不妨设 $f(x)$ 在 $[x_0,x_1]$ 上无界.

∴ $\forall M>0$，$\exists\xi_1\in[x_0,x_1]$，$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=2,3,\dots,n)$，使得

$$|f(\xi_1)|>\frac{\left|\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|+M}{\Delta x_1}$$

$$\therefore\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\ge|f(\xi_1)|\Delta x_1-\left|\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|>M$$

∴与积分和式在 $\lambda<\delta_0$ 时有界矛盾，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

No.

Date . .

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上有界。T是$[a,b]$的一个划分，记

$$M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\},\quad m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\},\quad k=1,2,\cdots,n$$ 定义2

$f(x)$在$[a,b]$上对应于划分T的达布上和：$S(f,T)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$

$f(x)$在$[a,b]$上对应于划分T的达布下和：$s(f,T)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$. 定义3

$\because m_k\le f(\xi_k)\le M_k$ （对于划分T）

$\therefore \sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k,\ \xi_k\in[x_{k-1},x_k]$

$\therefore s(f,T)\le\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\le S(f,T)$ ①

对于上和$S(f,T)$，$\because \sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\le S(f,T)$ (*)

$\forall\varepsilon>0$，$\because M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\}$ $\therefore\exists\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ 使得 $M_k-\frac{\varepsilon}{b-a}<f(\xi_k)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(M_k-\frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_k<\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$

即 $S(f,T)-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ (**)

$\therefore$由(*)(**)，$S(f,T)=\sup_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k]}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$。同理 $s(f,T)=\inf_{\xi_k\in[x_{k-1},x_k]}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$. ②

设T_1 T_2是$[a,b]$的两个划分且$T_1\subseteq T_2$，则$s(f,T_1)\le s(f,T_2)$，$S(f,T_2)\le S(f,T_1)$.

证明：下面证明$T_2=T_1\cup\{t\}$的情况，更多的添加点情况用归纳法可证.

记$T_1=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，不妨设$t\in(x_0,x_1)$，则

T_2是$a=x_0<t<x_1<x_2\cdots<x_n=b$.

记$M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\}$，$k=1,2\cdots,n$，$M'=\sup_{x\in[x_0,t]}\{f(x)\}$，$M''=\sup_{x\in[t,x_1]}\{f(x)\}$

$\therefore M_1\ge M'$，$M_1\ge M''$

$\therefore M'(t-x_0)+M''(x_1-t)\le M_1(t-x_0)+M_1(x_1-t)=M_1(x_1-x_0)$

$\therefore S(f,T_2)-S(f,T_1)=M'(t-x_0)+M''(x_1-t)-M_1(x_1-x_0)\le0$

$\therefore S(f,T_2)\le S(f,T_1)$

同理 $s(f,T_1)\le s(f,T_2)$. ③

No.

Date

若T_1，T_2是$[a,b]$的任意两个划分，则 $s(f,T_1) \le S(f,T_2)$

证明：令$T=T_1 \cup T_2$，有$T_1 \subseteq T$，$T_2 \subseteq T$

$\therefore$ 由前命题可得 $s(f,T_1) \le s(f,T)$，$S(f,T) \le S(f,T_2)$

由于 $s(f,T) \le S(f,T)$

$\therefore$ $s(f,T_1) \le S(f,T_2)$ ④

综合以上两命题，有$\forall T_1, T_2$，$T=T_1+T_2$，则 $s(T_1) \le s(T) \le S(T) \le S(T_2)$

即下和s有上界，故有上确界 $\underline{I}=\underline{\int_a^b} f(x)dx$，是$f(x)$在$[a,b]$上的下积分。

上和S有下界，故有下确界 $\bar{I}=\overline{\int_a^b} f(x)dx$，是$f(x)$在$[a,b]$上的上积分。

定义4

由于上积分$\bar{I}$是上和的下确界，$\therefore \forall \varepsilon>0$，$\exists T_1$，$S(f,T_1)<\bar{I}+\frac{\varepsilon}{2}$

记$\delta_1>0$是T_1中最小子区间的长度，T是直径$\lambda<\delta_1$的$[a,b]$的任一划分，令$T_2=T_1 \cup T$

$\therefore S(f,T_2) \le S(f,T_1)$

$S(f,T_2) \le S(f,T)$

$\therefore 0 \le S(f,T)-\bar{I} = S(f,T)-S(f,T_2)+S(f,T_2)-\bar{I} \le S(f,T)-S(f,T_2)+S(f,T_1)-\bar{I}$

$< S(f,T)-S(f,T_2)+\frac{\varepsilon}{2}$.

1) 当$T_2=T$，即T_1中的分点都是T的分点时，$S(f,T)-S(f,T_2)=0$

2) 当T_1中的分点只有t不是T中分点时，不妨设$t \in (x_{i-1},x_i)$

$\therefore S(f,T)-S(f,T_2)$

$=M_i(x_i-x_{i-1})-[M'(t-x_{i-1})+M''(x_i-t)]$

$\le 2M(x_i-x_{i-1}) \le 2M\lambda$ …… 其中 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}$

记T_1有n_1个分点，n_1相对划分T是常数

$\therefore S(f,T)-S(f,T_2) \le 2n_1 M\lambda$

取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4n_1M}, \delta_1\right\}$，则当$T$的直径$\lambda<\delta$时，有

$0 \le S(f,T)-S(f,T_2) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore 0 \le S(f,T)-\bar{I} < S(f,T)-S(f,T_2)+\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{\lambda\to 0} S(f,T)=\bar{I}$ ⑤

同理 $\lim\limits_{\lambda\to 0} s(f,T)=\underline{I}$

No.

Date

$\because s(f,T) \le S(f,T)$ $\therefore \lim\limits_{\lambda\to0} s(f,T) \le \lim\limits_{\lambda\to0} S(f,T)$ 即 $\underline{I} \le \overline{I}$ ⑥

4. 可积的充要条件：$\underline{I} = \overline{I}$ ⑦

必要性：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I$

$\therefore \forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 T 直径 $\lambda<\delta$ 时，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

对划分 T，$\exists \xi_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$，因为上和是黎曼和上确界

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k > S(f,T) - \frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore |S(f,T)-I| \le \left|S(f,T) - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| + \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{\lambda\to0} S(f,T) = I$

同理 $\lim\limits_{\lambda\to0} s(f,T) = I$. $\therefore \underline{I} = \overline{I}$

充分性：设 $\lim\limits_{\lambda\to0} S(f,T) = \lim\limits_{\lambda\to0} s(f,T)$，即 $\underline{I} = \overline{I}$

由于 $s(f,T) \le \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le S(f,T)$.

$\therefore \underline{I} = \lim\limits_{\lambda\to0} s(f,T) \le \lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \lim\limits_{\lambda\to0} S(f,T) = \overline{I}$.

由于 $\underline{I} = \overline{I}$ $\therefore \lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \underline{I} = \overline{I}$. 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

$\because \underline{I} = \overline{I}$ 即 $\lim\limits_{\lambda\to0}(S(f,T) - s(f,T)) = 0$，$\therefore \lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = 0$，定义 $\omega_k = M_k - m_k$ 定义5

$\therefore \lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k = 0$. ⑧

5. 常见可积函数类

① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明：$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\therefore$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

$\therefore \forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ 当 $x', x'' \in [a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

$\therefore$ 对于 $[a,b]$ 的任意划分 T，只要 $\lambda<\delta$，就有

$\omega_k = M_k - m_k = f(\xi_k) - f(\eta_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

$\therefore 0 \le \sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon$ 即 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k = 0$.

No.

Date

② $f(x)$在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证明：不妨设只有一个间断点c且$a<c<b$.

$\forall \varepsilon>0$，设$|f(x)|\le M$，$\forall x\in[a,b]$，

取$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{1+8M}$，$c_1=c-\varepsilon_1$，$c_2=c+\varepsilon_1$，$A=(c_1,f(c_1))$，$B=(c_2,f(c_2))$.

作 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,c_1]\cup[c_2,b] \\ g(x), & x\in(c_1,c_2) \end{cases}$ $g(x)$是$\overline{AB}$的方程.

则$F(x)$在$[a,b]$上连续，由前命题知$F(x)$在$[a,b]$上可积，

$\exists\delta<\varepsilon_1$，对任意划分$T$，只要$\lambda<\delta$，就有$\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k^F\Delta x_k<\varepsilon$.

$\therefore$在$T=\{x_0,\dots,x_n\}$中的各区间$[x_{k-1},x_k]$，一类完全包含于$[a,c_1]\cup[c_2,b]$，

用下标k'表示；一类与(c_1,c_2)有交，用k''表示，此类总长不超$4\varepsilon_1$(图)

$$
\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}\omega_k\Delta x_k &= \sum_{k'}\omega_{k'}\Delta x_{k'}+\sum_{k''}\omega_{k''}\Delta x_{k''} \\
&= \sum_{k'}\omega_{k'}^F\Delta x_{k'}+\sum_{k''}\omega_{k''}\Delta x_{k''} \\
&\le \varepsilon+2M\cdot 4\varepsilon_1 \\
&= \varepsilon+8M\cdot\frac{\varepsilon}{1+8M} \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

即$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$. 多个间断点的情形类似证明.

③ $f(x)$在$[a,b]$上单调则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证明：不妨设$f(x)$在$[a,b]$上单调增且非常函数.

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}>0$，对$[a,b]$的任意划分，只要$\lambda<\delta$，有

$$
\begin{aligned}
0<\sum_{k=0}^{n}\omega_k\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\Delta x_k \\
&< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})] \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot[f(x_n)-f(x_0)] \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

No.

Date

6. 可积函数性质

① 线性性质：$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

证明：$\forall\alpha\in R$，$\forall T$是$[a,b]$的划分，用ω_k、ω_k^f表示$\alpha f(x)$，$f(x)$在子区间$[x_{k-1},x_k]$的振幅，则$\omega_k=|\alpha|\omega_k^f$.

$\because \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^n\omega_k^f\Delta x_k=0$

$\therefore \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k=0$ $\therefore \alpha f(x)$可积.

用ω_k、ω_k^f、ω_k^g表示$f(x)+g(x)$，$f(x)$，$g(x)$在$[x_{k-1},x_k]$的振幅.

有$\omega_k\le\omega_k^f+\omega_k^g$

$\because \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^n\omega_k^f\Delta x_k=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^n\omega_k^g\Delta x_k=0$

$\therefore \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k=0$. $\therefore f(x)+g(x)$可积.

② 区间可加性：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

证明：1) $\Rightarrow$：

设T_1为$[a,c]$任意划分，T_2为$[c,b]$任意划分. $T=T_1\cup T_2$是$[a,b]$一个划分

$\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k+\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\omega_k\Delta x_k=\sum\limits_{k=1}^{n+m}\omega_k\Delta x_k$,

$\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k+\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum\limits_{k=1}^{n+m}f(\xi_k)\Delta x_k$. (*)

$\because \lambda(T)=\max\{\lambda(T_1),\lambda(T_2)\}$，且$f(x)$在$[a,b]$上可积

$\therefore$当$\lambda(T_1)$与$\lambda(T_2)$都趋于0时，有$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n+m}\omega_k\Delta x_k=0$

$\because 0\le\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k\le\sum\limits_{k=1}^{n+m}\omega_k\Delta x_k$, $0\le\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}\omega_k\Delta x_k\le\sum\limits_{k=1}^{n+m}\omega_k\Delta x_k$

$\therefore \lim\limits_{\lambda(T_1)\to 0}\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k=\lim\limits_{\lambda(T_2)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n+m}\omega_k\Delta x_k=0$.

$\therefore (*)\xrightarrow{\lambda\to 0}\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

2) $\Leftarrow$：

设$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$是$[a,b]$任一划分，不妨设$c\in[x_{i-1},x_i]$.

则$x_0<x_1\cdots<x_{i-1}<c$是$[a,c]$一划分，$c<x_i<\cdots<x_n$是$[c,b]$一划分.

No.

Date

$\exists M,\ \forall x\in[a,b],\ |f(x)|\le M$，设$\lambda$是$T$的直径.

$\therefore 0\le\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\sum_{k=1}^{i-1}\omega_k\Delta x_k+\omega_i\Delta x_i+\sum_{k=i+1}^{n}\omega_k\Delta x_k$

$\le\left[\sum_{k=1}^{i-1}\omega_k\Delta x_k+\omega'(c-x_{i-1})\right]+\left[\sum_{k=i+1}^{n}\omega_k\Delta x_k+\omega''(x_i-c)\right]+2M\cdot\lambda.$

$\because f(x)$在$[a,c]$与$[c,b]$上均可积

$\therefore \lim\limits_{\lambda\to0}\left[\sum_{k=1}^{i-1}\omega_k\Delta x_k+\omega'(c-x_{i-1})\right]=\lim\limits_{\lambda\to0}\left[\sum_{k=i+1}^{n}\omega_k\Delta x_k+\omega''(x_i-c)\right]=0$

$\therefore \lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$

$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$

③ 绝对值函数的可积性：$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

证明：设$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$是$[a,b]$的任意划分，记

$\omega_k=\sup\limits_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]}\{|f(\xi)-f(\eta)|\}$，

$\bar{\omega}_k=\sup\limits_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]}\{||f(\xi)|-|f(\eta)||\}$

则$\bar{\omega}_k\le\omega_k\ (k=1,2,\cdots,n)$

$\therefore 0\le\sum_{k=1}^{n}\bar{\omega}_k\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$ $\because \lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$

$\therefore \lim\limits_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}\bar{\omega}_k\Delta x_k=0$

$\therefore |f(x)|$在$[a,b]$上可积.

根据$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$及定积分比较原理，得

$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx$

④ 乘积函数的可积性：$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上均可积，则$f(x)\cdot g(x)$在$[a,b]$上可积

证明：先证$f(x)$与$g(x)$均非负的情形

设T是$[a,b]$任意划分，记$\omega_k=\sup\limits_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]}\{|f(\xi)g(\xi)-f(\eta)g(\eta)|\}$，

设M_k,m_k,ω_k^f分别是$f(x)$在$[x_{k-1},x_k]$上的上确界、下确界、振幅

$\bar{M}_k,\bar{m}_k,\omega_k^g$分别是$g(x)$在$[x_{k-1},x_k]$上的上确界、下确界、振幅.

$\because f(x)、g(x)\ge0$

$\because \omega_k \le M_k\overline{M}_k - m_k\overline{m}_k$

$= M_k(\overline{M}_k - \overline{m}_k) + \overline{m}_k(M_k - m_k)$

$\le M\omega_k^g + \overline{M}\omega_k^f$ $\quad \forall x\in[a,b],\ |f(x)|\le M,\ |g(x)|\le \overline{M}$.

$\therefore 0 \le \sum_{k=1}^n \omega_k\Delta x_k \le M\sum_{k=1}^n \omega_k^g\Delta x_k + \overline{M}\sum_{k=1}^n\omega_k^f\Delta x_k$

$\because \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n \omega_k^f\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n\omega_k^g\Delta x_k = 0$

$\therefore \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n \omega_k\Delta x_k = 0$.

当$f(x)$与$g(x)$符号不定时，令$f^+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}$，$f^-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$，$g^+(x)=\frac{|g(x)|+g(x)}{2}$，$g^-(x)=\frac{|g(x)|-g(x)}{2}$。则$f^+(x)$、$f^-(x)$、$g^+(x)$、$g^-(x)\ge 0$

$\because f(x)$、$g(x)$可积 $\therefore f^+(x)$、$f^-(x)$、$g^+(x)$、$g^-(x)$均可积。

$\therefore f(x)g(x) = [f^+(x)-f^-(x)][g^+(x)-g^-(x)]$

$= f^+(x)g^+(x) - f^-(x)g^+(x) + f^+(x)g^-(x) + f^-(x)g^-(x)$

$\because$ 每项都可积 $\therefore f(x)g(x)$ 可积.

⑤ 第一积分中值定理：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

证明：$\because f(x)$在$[a,b]$上连续，所以存在x_1、$x_2\in[a,b]$，$\forall x\in[a,b]$有

$m = f(x_1)\le f(x)\le f(x_2) = M$

$\because g(x)$不变号，不妨设为非负，则 $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$.

$\therefore m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$.

当$\int_a^b g(x)dx = 0$时，由上式，$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ $\therefore \forall\xi\in(a,b)$

$0 = \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

当$\int_a^b g(x)dx > 0$时，记$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ 则 $m\le\mu\le M$.

No.

Date

若 $m<\mu<M$，根据介值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$（或 (x_2,x_1)）使得

$$f(\xi)=\mu，即 \int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

若 $\mu=m$ 或 $\mu=M$，不妨设 $\mu=m$，由于 $\int_a^b g(x)dx>0$，所以 $\exists h>0$，使得

$\int_{a+h}^{b-h} g(x)dx>0$，如果 $f(x)-\mu=f(x)-m$ 在 (a,b) 上恒大于0

则 $\exists m_0>0$，$\forall x\in[a+h,b-h]$，有 $f(x)-\mu\geq m_0>0$.

$$\therefore \int_a^b f(x)g(x)dx-\mu\int_a^b g(x)dx=\int_a^b(f(x)-\mu)g(x)dx=\int_a^b(f(x)-m)g(x)dx$$

$$\geq\int_{a+h}^{b-h}(f(x)-\mu)g(x)dx\geq m_0\int_{a+h}^{b-h}g(x)dx>0$$

这与 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$ 矛盾 $\therefore \exists\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=\mu$

⑥ 第二积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

No.

Date

十一、函数项级数的一致收敛性

1. 函数序列的一致收敛性：

$\{f_n(x)\}$ 是定义在 I 上的函数序列，$f(x)$ 是定义在 I 上的一个函数。

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

函数项级数的一致收敛性：

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)=S(x)$，其部分和序列 $\{S_k(x)\}$ 在 I 上一致收敛于其和函数 $S(x)$.

2. 充要条件1：$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\ \forall p>0,\ \forall x\in I,\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon$. Cauchy

充要条件2：$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|S(x)-S_n(x)|=0$.

证明：必要性：由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛，$\therefore\forall\varepsilon>0\ \exists N>0$，当 $n>N$ 时，

$\forall x\in I$，有 $|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall p>0$，$\because n+p>N$

$\therefore |S_{n+p}(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$\therefore |S_{n+p}(x)-S_n(x)|\le|S_{n+p}(x)-S(x)|+|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

充分性：已知 $S_n(x)$ 收敛于 $S(x)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)\ (x\in I)$，

且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\forall x\in I$ 及 $\forall p>0$，有

$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

令 $p\to\infty$，即得

$|S(x)-S_n(x)|\le\varepsilon$，$x\in I$.

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

易由 Cauchy 收敛准则证充要条件2.

以上命题当 $p=1$ 时，表述为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的必要条件是 $\{u_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于零. 其逆否命题：若 $u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛 常用来验证函数项级数的不一致收敛.

3. 判别法：

1) 魏尔斯特拉斯比较判别法：

No.

Date

若∃收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$，使 $\forall x\in I$ 有 $|u_n(x)|\le C_n$，$n\in N$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明：$\forall \varepsilon>0$，$\because \sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 收敛，$\therefore \exists N\in N$ $\forall n>N, p>0$，

$\sum_{k=n+1}^{n+p} C_k<\varepsilon$.

$\because |u_n(x)|\le C_n$ $(x\in I, n\in N)$

$\therefore |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)|\le \sum_{k=n+1}^{n+p}|u_n(x)|\le \sum_{k=n+1}^{n+p} C_k<\varepsilon$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

2) 阿贝尔判别法：

设 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛；$\forall x\in I$ $\{v_n(x)\}$ 单调；$\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界。

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛

3) 狄利克雷判别法：

设 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列 $U_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 在 I 上一致有界；$\forall x\in D$ $\{v_n(x)\}$ 单调；$\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于零，则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

4. 一致收敛级数的性质

1) 连续性：

设 $f_n(x)\in C(I)$ $(n\in N)$，若 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 I 上连续

设 $u_n(x)\in C(I)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛，则其和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

证明：

$\forall x_0\in I$，$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)|$

$\le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$

$\because \{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$，$\therefore \forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n>N\ \forall x\in I$ $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

取定 $n_0>N$，则有 $|f(x)-f_{n_0}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$，取定 $x_0\in I$，$|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

又 $\because f_{n_0}(x)$ 在 I 上连续，$\therefore$ 对于上述 ε $\exists\delta$ $\forall x\in I$ 且 $|x-x_0|<\delta$，有

$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

$\therefore \forall x \in I$，只要 $|x-x_0|<\delta$，有

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，由于其在 I 上一致收敛，故其部分和函数 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛于和函数 $S(x)$，又 $\because S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 而 $u_k(x)\in C(I)$ $k=1,2,\cdots,n$

$\therefore S_n(x)\in C(I)$

由已证得的结论，$S(x)$ 在 I 上连续。

利用连续性的命题的逆命题可判断函数项级数的不一致收敛区间。

2）逐项积分：

设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，若该函数列在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。且 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

设 $u_n(x)\in C[a,b]$ $(n\in\mathbb{N})$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $\int_a^b[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)]dx$ 存在且可以逐项积分，即 $\int_a^b[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$.

证明：

$\because f(x)\in C[a,b]$ $\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积（有界、无间断点）

$\forall \varepsilon>0$ $\because \{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，$\therefore \exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n>N$

$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\therefore |\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon.$

$\therefore \int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$

$\therefore \int_a^b S(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx$

即 $\int_a^b[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)]dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b[\sum_{k=1}^{n}u_k(x)]dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)dx.$

利用逐项积分的命题的逆否命题亦可判断函数项级数不一致收敛区间。

3）逐项微分：

设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，且处处收敛于 $f(x)$. 设 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)] = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$.

设 $u_n(x) \in C^1[a,b]$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，设 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\frac{d}{dx}[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{d}{dx}u_n(x)]$.

证明：设 $\{f_n'(x)\}$ 一致收敛于 $g(x)$，故由连续性的命题 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$\because$ $g(x)$ 在 $[a,x]$ 上连续 $(x \in (a,b))$.

$\therefore$ $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$，$x \in [a,b]$.

上式两端同时令 $n\to\infty$，由逐项积分的命题

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

$\because$ $g(x)$ 连续 $\therefore$ $f'(x) = g(x)$

即 $\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)] = \lim_{n\to\infty}[\frac{d}{dx}f_n(x)]$.

$\because$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$ 且 $\{S_n'(x)\}$ 一致收敛

$\therefore$ $S'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x)$

即 $\frac{d}{dx}[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)] = \lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)]' = \lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x)$.